

Sucesiones Linealmente Recursivas

Carlos D'Andrea
Departament d'Àlgebra i Geometria
Universitat de Barcelona
carlos@dandrea.name

Noviembre de 2005

1. Preliminares y Notaciones

A lo largo de esta nota, denotaremos con \mathbb{K} un *cuerpo*¹, que varias veces supondremos infinito y mas aun, algebraicamente cerrado. El lector que no quiera preocuparse por este hecho puede suponer que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, el cuerpo de los números complejos.

Comenzaremos definiendo los términos que aparecen en el título de esta nota.

Definición 1.1. Una **sucesión** a valores en \mathbb{K} es una función $\mathbf{a} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$.

Observación 1.2. Para los propósitos de esta nota, \mathbb{N} es el conjunto de los números enteros positivos, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Notación 1.3. Para simplificar la notación, haremos $a_n := \mathbf{a}(n)$, y además notaremos la sucesión \mathbf{a} como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, para que quede claro que su dominio son los enteros positivos.

Ejemplo 1.4. $a_n = (-1)^n, \quad -1, 1, -1, \dots$

Ejemplo 1.5. $a_n = \frac{n+1}{2}, \quad 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$

Definición 1.6. Dado $\ell \in \mathbb{N}$, una sucesión se dice **recursiva** con período ℓ si existe una función $f : \mathbb{K}^\ell \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+\ell} = f(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+\ell-1})$.

Ejemplo 1.7 (La sucesión de Fibonacci). Esta sucesión va a aparecer muchas veces a lo largo del texto. La sucesión de Fibonacci se define de la manera siguiente: $a_1 := 1, a_2 := 1$, y para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$, es decir, cada término a partir del tercero se obtiene sumando los dos anteriores. La sucesión es la siguiente: $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ Esta es una sucesión recursiva de acuerdo con la definición de arriba. En este caso $\ell = 2$, y $f(x_1, x_2) := x_1 + x_2$.

¹Es decir que estamos abusando de notación ya que si quisiéramos ser precisos, deberíamos hablar de una terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ que satisface ciertas propiedades que se suponen conocidas por el lector

Ejemplo 1.8 (Sucesiones aritméticas). Dados $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. La sucesión aritmética cuyo primer término es λ y de razón λ' se define así:

$$a_1 := \lambda, \quad a_{n+1} := a_n + \lambda'. \quad (1)$$

En este caso, $\ell = 1$ y $f(x_1) := x_1 + \lambda'$.

Ejemplo 1.9 (Sucesiones geométricas). Dados $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. La sucesión geométrica de primer término igual a λ y de razón λ' se define así:

$$a_1 := \lambda, \quad a_{n+1} := a_n \lambda'.$$

En este caso también $\ell = 1$ y $f(x_1) := x_1 \lambda'$.

Ejemplo 1.10. Se hace $a_1 := 1$ y a partir de allí, $a_{n+1} := \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}$. Los primeros términos de esta sucesión son $1, \frac{3}{2}, \frac{17}{6}, \dots$. En los cursos de análisis se demuestra que esta sucesión converge a $\sqrt{2}$.

Los ejemplos vistos más arriba pueden ser escritos de forma recursiva:

- En el ejemplo 1.4 $(-1, 1, -1, \dots)$, uno hace $a_1 := -1, \quad a_{n+1} := -1 a_n$. Esta sucesión es geométrica.
- En el ejemplo 1.5 $(1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots)$, se tiene $a_1 := 1, \quad a_{n+1} := a_n + \frac{1}{2}$. Esta sucesión es aritmética.

Observación 1.11. Notar que el período no está bien definido. De hecho, uno podría definir la sucesión del ejemplo 1.4 de la manera siguiente:

$$a_1 := -1, \quad a_2 := 1, \quad a_3 := -1, \quad a_{n+3} := -a_{n+2} + a_{n+1} + a_n,$$

y resultaría con $\ell = 3$.

Esta ambigüedad en la definición no será un problema para los efectos y resultados de esta nota, pero el lector debe notar que estamos trabajando con un concepto que en principio no está bien definido.

Definición 1.12. Una sucesión se dice **linealmente recursiva** si existen $\ell \in \mathbb{N}$, $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{\ell-1} \in \mathbb{K}$ tal que

$$a_{n+\ell} = \lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} + \dots + \lambda_{\ell-1} a_{n+\ell-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es decir que una *sucesión linealmente recursiva* (el objeto de esta nota) no es otra cosa que una función recursiva con período ℓ , donde la función de recursión es lineal, es decir $f : \mathbb{K}^\ell \rightarrow \mathbb{K}$ es una transformación \mathbb{K} -lineal:

$$f(x_1, \dots, x_\ell) = \lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_2 + \dots + \lambda_{\ell-1} x_\ell.$$

Ejemplo 1.13. La sucesión de Fibonacci es claramente una sucesión linealmente recursiva. En este caso, $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$.

Ejemplo 1.14. Las sucesiones geométricas de la definición 1.9 son también recursivas. En la notación de la definición 1.12, se tiene que $\lambda_0 = \lambda'$.

Aún cuando aparentemente no parezcan, las sucesiones aritméticas también son linealmente recursivas.

Lema 1.15. Las sucesiones aritméticas son linealmente recursivas con período $\ell = 2$.

Demostración. De acuerdo a lo definido en (1), se tiene

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \lambda' \\ a_{n+2} - a_{n+1} &= \lambda'. \end{aligned}$$

Igualamos los primeros miembros de estas igualdades:

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1},$$

y de aquí se deduce que

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n,$$

lo cual dice que la sucesión aritmética es linealmente recursiva con período $\ell = 2$ y función lineal asociada $f(x_1, x_2) := -x_1 + 2x_2$. \square

Ejercicio 1.16. Demostrar que toda sucesión periódica es linealmente recursiva. Encontrar la fórmula de la recursión.

Ejercicio 1.17. Decidir si la siguiente sucesión

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := a_n + n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es linealmente recursiva. Si lo es, encontrar la ecuación de recursión.

Por lo visto anteriormente, las sucesiones linealmente recursivas engloban tanto sucesiones aritméticas como geométricas. De los cursos elementales de álgebra se sabe que las fórmulas explícitas de las sucesiones aritméticas y geométricas son

$$a_n = \lambda + (n - 1)\lambda', \quad a_n = \lambda \lambda'^{n-1}$$

respectivamente. El objetivo de esta nota es encontrar fórmulas explícitas para cualquier tipo de sucesión linealmente recursiva. Es decir, nos proponemos completar el siguiente cuadro:

	Forma Recursiva	Forma Explícita
Sucesiones Geométricas	$a_{n+1} = \lambda' a_n$	$a_n = \lambda \lambda'^{n-1}$
Sucesiones Aritméticas	$a_{n+1} = \lambda' + a_n$	$a_n = \lambda + (n - 1)\lambda'$
Suc. Lin. Recursivas	$a_{n+\ell} = \lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} + \dots + \lambda_{\ell-1} a_{n+\ell-1}$???

Para que nos quede claro que no toda sucesión linealmente recursiva es o aritmética o geométrica, veamos que la sucesión de Fibonacci no es de ninguna de las dos clases.

Lema 1.18. *La sucesión de Fibonacci no es ni aritmética ni geométrica.*

Demostración. Listemos los primeros términos de la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, ...

- Si la sucesión fuera aritmética, la resta entre dos términos consecutivos sería constante, pero la sucesión de restas es 0, 1, 1, 2, 3, ... que no lo es.
- Si la sucesión fuera geométrica, el cociente entre dos términos consecutivos sería constante, pero la sucesión de cocientes es 1, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, ... que no lo es.

□

A veces es interesante saber si una sucesión tiene *crecimiento* lineal o exponencial, lo cual tiene que ver con el hecho de que si la sucesión -para valores grandes de n - se comporta como una sucesión aritmética (crecimiento lineal) o geométrica (crecimiento exponencial). Esto es de interés en modelos económicos y/o de crecimiento de población entre otras áreas. La siguiente proposición nos dirá que la sucesión de Fibonacci tiene crecimiento exponencial.

Proposición 1.19. *Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci. Para todo $n \geq 6$, se tiene*

$$\sqrt{2}^n \leq a_n < 2^n.$$

Demostración. La prueba la haremos por inducción. Listemos los primeros siete términos de la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13.

- Para $n = 6$ se tiene que $\sqrt{2}^6 = 2^3 = 8 = a_6 < 2^6 = 64$, o sea que vale la desigualdad.
- Para $n = 7$ se tiene que $\sqrt{2}^7 = 8\sqrt{2} < a_7 (= 13) < 2^7 = 128$, y también se cumple el enunciado para este caso.

Veamos ahora el caso general, supongamos entonces que el enunciado vale para n y $n + 1$ ($n \geq 6$). Entonces, por hipótesis inductiva, se tiene

$$\begin{array}{rcccl} \sqrt{2}^n & \leq & a_n & < & 2^n \\ \sqrt{2}^{n+1} & \leq & a_{n+1} & < & 2^{n+1}. \end{array}$$

Sumando miembro a miembro se tiene

$$\sqrt{2}^n + \sqrt{2}^{n+1} \leq a_{n+2} = a_{n+1} + a_n < 2^n + 2^{n+1}.$$

Acotamos inferiormente el término de la izquierda: Para acotar inferiormente, se tiene que

$$\sqrt{2}^n + \sqrt{2}^{n+1} > \sqrt{2}^n + \sqrt{2}^n = 2\sqrt{2}^n = \sqrt{2}^{n+2}.$$

Ahora acotamos superiormente el término de la derecha:

$$2^n + 2^{n+1} = 2^n(1 + 2) < 2^n \cdot 2^2 = 2^{n+2}.$$

Es decir que se tiene

$$\sqrt{2}^{n+2} \leq a_{n+2} < 2^{n+2},$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

Veremos más adelante que es posible decir mucho más acerca del comportamiento exponencial de la sucesión de Fibonacci.

2. El espacio vectorial asociado a una recursión lineal

En esta sección estudiaremos algunas propiedades asociadas a sucesiones linealmente recursivas. Recordemos la siguiente notación habitual en álgebra: dados dos conjuntos A y B , denotamos con A^B al conjunto de todas las funciones $f : A \rightarrow B$. Con esta notación, está claro que las sucesiones a valores en \mathbb{K} no son otra cosa que elementos del conjunto $\mathbb{N}^{\mathbb{K}}$.

Proposición 2.1. *Fijados $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{\ell-1} \in \mathbb{K}$, el conjunto*

$$\mathcal{S} := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{K}} : a_{n+\ell} = \lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} + \dots + \lambda_{\ell-1} a_{n+\ell-1} \forall n \in \mathbb{N}\}$$

es un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión ℓ .

Demostración. Es sabido que $\mathbb{N}^{\mathbb{K}}$ es un \mathbb{K} espacio vectorial (de dimensión infinita), como \mathcal{S} es un subconjunto de $\mathbb{N}^{\mathbb{K}}$, para ver que es un espacio vectorial alcanza con ver que es un subespacio de este último. Para ello, tendremos que verificar las siguientes tres condiciones:

1. $\mathbf{0}$ (el vector nulo de $\mathbb{N}^{\mathbb{K}}$) es un elemento de \mathcal{S} .
2. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pertenecen a \mathcal{S} , entonces $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ también pertenece a \mathcal{S} .
3. Dados $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, la nueva sucesión $(\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un elemento de \mathcal{S} .

Demostremos estas propiedades.

1. $\mathbf{0}$ es la sucesión con todas las coordenadas nulas. Claramente cumple con la condición de pertenecer a \mathcal{S} , ya que trivialmente se verifica

$$0 = \lambda_0 0 + \lambda_1 0 + \dots + \lambda_{\ell-1} 0.$$

Luego, $\mathbf{0} \in \mathcal{S}$.

2. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son elementos de \mathcal{S} , entonces

$$a_{n+\ell} = \lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} + \dots + \lambda_{\ell-1} a_{n+\ell-1}$$

y

$$b_{n+\ell} = \lambda_0 b_n + \lambda_1 b_{n+1} + \dots + \lambda_{\ell-1} b_{n+\ell-1}.$$

Sumando ambas ecuaciones, se tiene

$$a_{n+\ell} + b_{n+\ell} = \lambda_0 (a_n + b_n) + \lambda_1 (a_{n+1} + b_{n+1}) + \dots + \lambda_{\ell-1} (a_{n+\ell-1} + b_{n+\ell-1}),$$

lo cual muestra $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$.

3. Como se cumple que

$$a_{n+\ell} = \lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} + \dots + \lambda_{\ell-1} a_{n+\ell-1},$$

multiplicando por λ miembro a miembro:

$$\lambda a_{n+\ell} = \lambda_0 \lambda a_n + \lambda_1 \lambda a_{n+1} + \dots + \lambda_{\ell-1} \lambda a_{n+\ell-1},$$

y esto dice que $(\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$.

Falta ver que la dimensión de \mathcal{S} es ℓ . Para ello construimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{K}^\ell \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto (a_1, a_2, \dots, a_\ell). \end{aligned}$$

Afirmamos que ϕ es un isomorfismo de \mathbb{K} espacios vectoriales. Con eso demostramos que la dimensión de \mathcal{S} es la misma que la de \mathbb{K}^ℓ , que obviamente es ℓ .

- ϕ está bien definida, y es una transformación lineal. En efecto, ϕ no es otra cosa que la restricción de la proyección de las primeras ℓ coordenadas sobre $\mathbb{N}^{\mathbb{K}}$, que es una transformación \mathbb{K} -lineal.
- ϕ es monomorfismo: Si $\phi((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (0, 0, \dots, 0)$, entonces por la definición de ϕ , ya sabemos que $a_1 = a_2 = \dots = a_\ell = 0$.

Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} a_{\ell+1} &= \lambda_0 a_1 + \lambda_1 a_2 + \dots + \lambda_{\ell-1} a_\ell &= 0 \\ a_{\ell+2} &= \lambda_0 a_2 + \lambda_1 a_3 + \dots + \lambda_{\ell-1} a_{\ell+1} &= 0 \\ \vdots & & \vdots \end{aligned}$$

Inductivamente, se ve que $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, es decir que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \mathbf{0}$ y que ϕ es un monomorfismo.

- ϕ es epimorfismo: Sea $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell)$ un elemento cualquiera de \mathbb{K}^ℓ , construiremos una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ tal que $\phi((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell)$. Para que esto ocurra, obviamente que hay que definir los primeros valores de la manera siguiente: $a_1 := \alpha_1$, $a_2 := \alpha_2$, ... $a_\ell := \alpha_\ell$. Luego, para que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sea un elemento de \mathcal{S} , hay que definir los valores siguientes de manera inductiva:

$$\begin{aligned} a_{\ell+1} &= \lambda_0 a_1 + \lambda_1 a_2 + \dots + \lambda_{\ell-1} a_\ell \\ a_{\ell+2} &= \lambda_0 a_2 + \lambda_1 a_3 + \dots + \lambda_{\ell-1} a_{\ell+1} \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

Esto garantiza que tanto la sucesión está en \mathcal{S} , y que su imagen es $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell)$, como queríamos demostrar.

□

3. Bases explícitas de soluciones

Claramente que via el isomorfismo ϕ descrito en la sección anterior, uno se puede construir una base del espacio vectorial \mathcal{S} . Por ejemplo, la preimagen de la base canónica de \mathbb{K}^ℓ . Pero no está claro que trabajar con esta base nos de expresiones “explícitas” para los elementos de \mathcal{S} , que es el objetivo de esta nota. En lo que sigue, intentaremos encontrar elementos explícitos que describan a \mathcal{S} .

3.1. La sucesión de Fibonacci

Llamemos \mathcal{S}_F al espacio vectorial \mathcal{S} definido en la sección anterior que contiene entre sus elementos a la sucesión de Fibonacci. Es decir

$$\mathcal{S}_F := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Queremos ver si existe en \mathcal{S}_F un elemento de “crecimiento exponencial”, es decir si hay alguna sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}_F$ que cumpla $a_n = r^n \forall n \in \mathbb{N}$, con $r \neq 0$. Para ello, debido a la condición $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, se debería cumplir que

$$r^{n+2} = r^{n+1} + r^n, \tag{2}$$

y como $r \neq 0$, entonces se tiene la condición

$$r^2 = r + 1,$$

es decir que r debería ser una solución de la ecuación cuadrática $r^2 - r - 1 = 0$. Si \mathbb{K} fuera el cuerpo de los números reales (o cualquier cuerpo de característica distinta de dos donde la ecuación $T^2 - 5$ tiene dos soluciones), uno podría resolver esta ecuación cuadrática y encontrar dos soluciones distintas:

$$r_1 := \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad r_2 := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \tag{3}$$

Es fácil ver que haciendo r igual a r_1 o r_2 , se satisface la identidad (2). Luego, se tiene lo siguiente.

Proposición 3.1. *Supongamos que existen r_1 y r_2 en \mathbb{K} definidos como en (3) y que son distintos entre sí y ninguno de ellos igual a cero. Haciendo $a_n := r_1^n$, $b_n := r_2^n$ y $\mathbb{B} := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$, se tiene que \mathbb{B} es una base de \mathcal{S}_F como \mathbb{K} -espacio vectorial.*

Demostración. Por lo expuesto anteriormente, está claro que tanto $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son elementos de \mathcal{S}_F . Sabemos (por la proposición 2.1) que la dimensión de \mathcal{S}_F es dos, así que para ver que \mathbb{B} es una base, alcanza con demostrar que los elementos de \mathbb{B} son linealmente independientes.

Supongamos que existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ que verifican que

$$\alpha_1 a_n + \alpha_2 b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o sea

$$\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nos quedamos con las dos primeras ecuaciones de la familia anterior ($n = 1, 2$), y nos queda el sistema lineal

$$\begin{aligned} \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 &= 0, \\ \alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Este es un sistema homogéneo de dos ecuaciones lineales en α_1, α_2 . Se sabe que si el determinante del sistema es distinto de cero, entonces la única solución del mismo es la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Calculando el determinante, resulta

$$\det \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{pmatrix} = r_1 r_2 (r_1 - r_2)$$

que es un número distinto de cero por las condiciones impuestas sobre r_1 y r_2 en el enunciado. Esto demuestra lo que queríamos. \square

Corolario 3.2. *Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci. Existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En efecto, la sucesión de Fibonacci se tiene que escribir como una combinación de elementos de \mathbb{B} . Calculemos los escalares, para eso volvemos a plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas haciendo $n = 1, 2$:

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \\ 1 &= a_2 = \alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema lineal, se tiene que $\alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Es decir

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Observación 3.3. Si uno contrasta esta fórmula explícita para la sucesión de Fibonacci con la acotación hecha en la proposición 1.19, se encuentra con que para valores grandes de n , la sucesión “se porta” como $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ (ya que r_1^n tiende a cero), que es un número que está entre $\sqrt{2}^n$ y 2^n .

3.2. El caso general

Veamos ahora qué pasa en el caso general, es decir cuando tenemos una sucesión linealmente recursiva genérica

$$a_{n+\ell} = \lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} + \dots + \lambda_{\ell-1} a_{n+\ell-1}, \quad (4)$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{\ell-1}$ son elementos fijos de \mathbb{K} .

Si planteamos nuevamente una solución “exponencial” del tipo $a_n = r^n$ con $r \neq 0$, entonces la ecuación (4) se lee así:

$$r^{n+\ell} = \lambda_0 r^n + \lambda_1 r^{n+1} + \dots + \lambda_{\ell-1} r^{n+\ell-1}.$$

Como r es distinto de cero, podemos simplificar r^n en ambos miembros:

$$r^\ell = \lambda_0 + \lambda_1 r + \dots + \lambda_{\ell-1} r^{\ell-1}. \quad (5)$$

O sea que r tiene que ser una solución de la ecuación (5). Recíprocamente, para cualquier r que satisface (5), haciendo $a_n := r^n$ $n = 1, 2, \dots$ se tiene que la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface la recursión (4).

Definición 3.4. El polinomio asociado a la recurrencia (4) es

$$P(t) := t^\ell - \lambda_{\ell-1} t^{\ell-1} - \lambda_{\ell-2} t^{\ell-2} - \dots - \lambda_1 t - \lambda_0.$$

Observar que $P(t)$ es un polinomio mónico de grado ℓ . De los cursos elementales de álgebra, se sabe que $P(t)$ puede tener a lo más ℓ raíces en \mathbb{K} . El próximo resultado caracteriza totalmente el espacio de soluciones de las sucesiones linealmente recursivas cuyo polinomio asociado tiene exactamente ℓ raíces.

Teorema 3.5. Con la notación de arriba, si $P(t)$ tiene ℓ raíces r_1, r_2, \dots, r_ℓ distintas entre si y distintas de cero, entonces

$$\mathbb{B} := \{(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (r_\ell^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$$

es una base de \mathcal{S} como \mathbb{K} espacio vectorial.

Observación 3.6. Notar que la condición impuesta sobre las raíces de que ninguna de ellas sea igual a cero es equivalente a pedir $\lambda_0 \neq 0$. La otra condición (que sean distintas entre si) también tiene una traducción algebraica (discriminantes) que no discutiremos aquí.

Demostración. Por lo expuesto mas arriba, está claro que haciendo $a_n := r_j^n$, $j = 1, 2, \dots, \ell$ esta sucesión cumple con la recursión (4). Por otro lado, en virtud de la proposición 2.1, sabemos que \mathcal{S} tiene dimensión ℓ . Luego, para ver que \mathbb{B} es una base de \mathcal{S} , alcanza con ver que es un conjunto linealmente independiente.

Supongamos entonces que tenemos una combinación lineal de los elementos de \mathbb{B} que da el vector nulo, es decir

$$\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \dots + \alpha_\ell r_\ell^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{K}$.

Como antes, nos construimos un sistema lineal en los α 's considerando las primeras ℓ ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \dots + \alpha_\ell r_\ell & = & 0 \\ \alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 + \dots + \alpha_\ell r_\ell^2 & = & 0 \\ & \vdots & \\ \alpha_1 r_1^\ell + \alpha_2 r_2^\ell + \dots + \alpha_\ell r_\ell^\ell & = & 0. \end{cases} \quad (6)$$

La matriz asociada a este sistema -que llamaremos $V(r_1, r_2, \dots, r_\ell)$ - es de la forma siguiente:

$$V(r_1, r_2, \dots, r_\ell) = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_\ell \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_\ell^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^\ell & r_2^\ell & \dots & r_\ell^\ell \end{pmatrix}.$$

Si logramos demostrar que $\det(V(r_1, r_2, \dots, r_\ell)) \neq 0$, estamos hechos ya que eso dice que la única solución del sistema (6) es la solución "trivial" $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_\ell = 0$. La siguiente proposición nos da una fórmula explícita para este determinante, que junto con las hipótesis, termina de demostrar el teorema. \square

Proposición 3.7.

$$\det(V(r_1, r_2, \dots, r_\ell)) = r_1 r_2 \dots r_\ell \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} (r_j - r_i).$$

Demostración. La demostración la haremos por inducción en ℓ . El caso inicial $\ell = 1$ es trivial. Veamos entonces el paso inductivo. Sean $r_1, r_2, \dots, r_{\ell-1}$ elementos de \mathbb{K} . Consideramos el siguiente polinomio

$$Q(t) := \det(V(r_1, r_2, \dots, r_{\ell-1}, t)) = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_{\ell-1} & t \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_{\ell-1}^2 & t^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^\ell & r_2^\ell & \dots & r_{\ell-1}^\ell & t^\ell \end{pmatrix}.$$

De la definición de $Q(t)$ se deduce fácilmente lo siguiente:

- $Q(t)$ es un polinomio de grado menor o igual que ℓ . Esto se ve “desarrollando el determinante que define a este polinomio usando la última columna.
- El coeficiente principal de $Q(t)$ es $\det(V(r_1, r_2, \dots, r_{\ell-1}))$, ya que el coeficiente de t^ℓ en la expansión por la última columna es el menor que resulta de suprimir las últimas fila y columna.
- $Q(0) = Q(r_1) = \dots = Q(r_{\ell-1}) = 0$, ya que al hacer estas especializaciones, la matriz resultante termina o bien teniendo una columna llena de ceros o bien dos columnas iguales.

Por todo esto, podemos concluir que

$$Q(t) = \det(V(r_1, r_2, \dots, r_{\ell-1})) t(t - r_1)(t - r_2) \dots (t - r_{\ell-1}). \quad (7)$$

Por hipótesis inductiva, se tiene

$$\det(V(r_1, r_2, \dots, r_{\ell-1})) = r_1 r_2 \dots r_{\ell-1} \prod_{1 \leq i < j \leq \ell-1} (r_j - r_i). \quad (8)$$

Lo que nosotros queremos calcular es $Q(r_\ell) = \det(V(r_1, r_2, \dots, r_\ell))$. Especializando $t = r_\ell$ en (7) y usando (8), se tiene que $\det(V(r_1, r_2, \dots, r_\ell))$ es igual a

$$\left(r_1 r_2 \dots r_{\ell-1} \prod_{1 \leq i < j \leq \ell-1} (r_j - r_i) \right) r_\ell (r_\ell - r_1)(r_\ell - r_2) \dots (r_\ell - r_{\ell-1}).$$

Reordenando los términos de esta expresión, se obtiene

$$\det(V(r_1, r_2, \dots, r_\ell)) = r_1 r_2 \dots r_\ell \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} (r_j - r_i)$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

Veamos ahora qué pasa cuando 0 es una de las raíces del polinomio asociado a la sucesión, y las otras raíces son simples.

Supongamos que el polinomio asociado a (4) es de la forma

$$P(t) = t^\ell - \lambda_{\ell-1} t^{\ell-1} - \lambda_{\ell-2} t^{\ell-2} - \dots - \lambda_j t^j \quad (9)$$

con $j \geq 1$. Para cada $k = 1, 2, \dots, j$, definimos una sucesión $(a_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manera siguiente:

$$a_1^k := 0, \quad a_2^k := 0, \quad \dots, \quad a_{k-1}^k := 0, \quad a_k^k := 1, \quad a_{k+1}^k := 0, \quad a_{k+2}^k := 0, \quad \dots \quad (10)$$

es decir que a_n^k es igual a cero excepto en el término k -ésimo.

Ejercicio 3.8. *Demostrar que la sucesión $(a_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ definida en (10) es un elemento de \mathcal{S} si el polinomio asociado a la recurrencia es de la forma (9).*

Proposición 3.9. Si $P(t)$ es de la forma descrita en (3.9) y tiene como raíces no nulas $r_1, \dots, r_{\ell-j}$ que son distintas entre sí, entonces una base para \mathcal{S} es

$$\mathbb{B} := \{(a_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (a_n^2)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (a_n^j)_{n \in \mathbb{N}}, (r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (r_{\ell-j}^n)_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

Demostración. Está claro que todos los elementos de \mathbb{B} pertenecen a \mathcal{S} (por el ejercicio 3.8 y el hecho que las r_i son raíces de $P(t)$). Como sabemos que la dimensión de \mathcal{S} es ℓ y el cardinal de \mathbb{B} es ℓ , nuevamente alcanza con demostrar que este conjunto es linealmente independiente. tomemos entonces una combinación lineal de elementos de \mathbb{B} igualada a cero:

$$\alpha_1 a_n^1 + \alpha_2 a_n^2 + \dots + \alpha_j a_n^j + \alpha_{j+1} r_1^n + \dots + \alpha_\ell r_{\ell-j}^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell$ son todos elementos de \mathbb{K} .

Consideremos las primeras ℓ ecuaciones lineales de la lista anterior. El sistema de ecuaciones que resulta del mismo tiene asociada la siguiente matriz cuadrada de tamaño $\ell \times \ell$:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{\ell-j} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_{\ell-j}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_1^j & r_2^j & \dots & r_{\ell-j}^j \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_1^{j+1} & r_2^{j+1} & \dots & r_{\ell-j}^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_1^\ell & r_2^\ell & \dots & r_{\ell-j}^\ell \end{pmatrix},$$

donde el bloque de unos y ceros tiene ℓ filas y j columnas.

Como en este bloque de unos y ceros, las últimas $\ell-j$ filas contiene solamente elementos nulos, se tiene (ver el ejercicio siguiente)

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} r_1^{j+1} & r_2^{j+1} & \dots & r_{\ell-j}^{j+1} \\ r_1^{j+2} & r_2^{j+2} & \dots & r_{\ell-j}^{j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^\ell & r_2^\ell & \dots & r_{\ell-j}^\ell \end{pmatrix}.$$

Sacando de factor común r_i^j en la columna i , lo anterior es igual a

$$r_1^j r_2^j \dots r_{\ell-j}^j \det \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_{\ell-j} \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_{\ell-j}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{\ell-j} & r_2^{\ell-j} & \dots & r_{\ell-j}^{\ell-j} \end{pmatrix} = r_1^j r_2^j \dots r_{\ell-j}^j \det(V(r_1, r_2, \dots, r_{\ell-j})),$$

esta última expresión es distinta cero, debido a las condiciones que hemos impuesto a los r_i 's en la hipótesis y la proposición 3.7. \square

Ejercicio 3.10. Sean A y B dos matrices cuadradas de tamaños $j \times j$ y $(\ell - j) \times (\ell - j)$ respectivamente. Sea C una matriz de tamaño $j \times (\ell - j)$. Demostrar que

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B),$$

donde $\mathbf{0}$ es una matriz de $(\ell - j) \times j$ cuyos coeficientes son todos cero.

Sugerencia: Desarrollar el determinante por la primer fila o columna y usar inducción en ℓ .

3.3. Caso real vs caso complejo

El teorema 3.5 nos da una caracterización completa de aquellas sucesiones cuyo polinomio asociado tiene todas sus raíces en el cuerpo, y todas son simples (excepto quizás el cero). En el caso de cuerpos algebraicamente cerrados, esta descripción es altamente satisfactoria ya que polinomios con coeficientes en cuerpos algebraicamente cerrados tienen todas sus raíces en ese cuerpo. Pero, ¿qué pasa cuando los coeficientes son reales y las raíces son complejas no reales? ¿Cómo se hace para “recuperar” una base de soluciones reales a partir de las soluciones complejas?

Ejemplo 3.11. La sucesión $1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, \dots$ satisface $a_{n+2} = a_n$, y tiene por polinomio asociado $P(t) = t^2 + 1$ cuyas raíces son los números complejos imaginarios i y $-i$. O sea que una “base” de soluciones para \mathcal{S} como espacio vectorial complejo en este caso sería $\{(i^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-i)^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$. ¿Cómo encontramos una base de \mathcal{S} como espacio vectorial sobre \mathbb{R} ?

Ejercicio 3.12. Mostrar que si $P(t)$ es un polinomio con coeficientes reales, y tiene una raíz compleja ω , entonces $\bar{\omega}$ (el complejo conjugado a ω) es también raíz de $P(t)$.

Proposición 3.13. Si el polinomio asociado a la recursión $P(t)$ tiene coeficientes reales y raíces complejas simples $r_1, \dots, r_s, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_p, \bar{z}_p$ donde ninguno de los r_j o los z_k es cero, los r_j son reales y los z_k son complejos no reales ($j = 1, \dots, s, k = 1, \dots, p$), entonces una base de \mathcal{S} como \mathbb{R} -espacio vectorial es

$$\mathbb{B} := \{(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (r_s^n)_{n \in \mathbb{N}}, (Re(z_1^n))_{n \in \mathbb{N}}, (Im(z_1^n))_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (Re(z_p^n))_{n \in \mathbb{N}}, (Im(z_p^n))_{n \in \mathbb{N}}\},$$

donde $Re(z)$ (resp. $Im(z)$) denota la parte real (resp. imaginaria) del número complejo z .

Demostración. Claramente las sucesiones $(r_j^n)_{n \in \mathbb{N}}, j = 1, 2, \dots, s$ satisfacen con la ecuación de recurrencia ya que los r_j son soluciones del polinomio asociado. Por otro lado, fijado k entre 1 y p , se tiene que

$$z_k^{n+\ell} = \lambda_0 z_k^n + \lambda_1 z_k^{n+1} + \dots + \lambda_{\ell-1} z_k^{n+\ell-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ya que los z_k son también raíces del polinomio asociado. Tomamos parte real miembro a miembro:

$$Re(z_k)^{n+\ell} = Re(\lambda_0 z_k^n + \lambda_1 z_k^{n+1} + \dots + \lambda_{\ell-1} z_k^{n+\ell-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

En el segundo miembro usamos la linealidad de la parte real de un número complejo con respecto a la suma y al producto por escalares *reales* (recordar que $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ son todos números reales. Nos queda

$$Re(z_k)^{n+\ell} = \lambda_0 Re(z_k^n) + \lambda_1 Re(z_k^{n+1}) + \dots + \lambda_{\ell-1} Re(z_k^{n+\ell-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

lo cual dice que la sucesión $a_n := Re(Re(z_k^n))_{n \in \mathbb{N}}$ satisface la recurrencia (4), y por lo tanto es un elemento de \mathcal{S} . De la misma manera, tomando partes imaginarias en lugar de partes reales en (11), se tiene que las sucesiones $(Im(z_k^n))_{n \in \mathbb{N}}$ están en \mathcal{S} .

Como siempre –por cuestiones de dimensión– alcanza con ver que \mathbb{B} es \mathbb{R} -linealmente independiente. Supongamos entonces que existen números reales $u_1, u_2, \dots, u_s, v_1, v_2, \dots, v_p, w_1, w_2, \dots, w_p$ tal que

$$\begin{aligned} u_1 r_1^n + u_2 r_2^n + \dots + u_s r_s^n + v_1 Re(z_1^n) + w_1 Im(z_1^n) + \\ + v_2 Re(z_2^n) + w_2 Im(z_2^n) + \dots + v_p Re(z_p^n) + w_p Im(z_p^n) \end{aligned} = 0 \quad (12)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando el ejercicio 3.16, podemos escribir

$$v_k Re(z_k^n) + w_k Im(z_k^n) = \alpha_k z_k^n + \beta_k \overline{z_k^n}$$

con

$$\alpha_k = \frac{v_k - w_k i}{2}, \quad \beta_k = \frac{v_k + w_k i}{2}. \quad (13)$$

Luego, (12) se transforma en

$$u_1 r_1^n + u_2 r_2^n + \dots + u_s r_s^n + \alpha_1 z_1^n + \beta_1 \overline{z_1^n} + \dots + \alpha_p z_p^n + \beta_p \overline{z_p^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si miramos esta igualdad en \mathbb{C} , tenemos una combinación lineal de $s + 2p$ exponenciales *distintas* dos a dos. Como en la demostración del teorema 3.5, de esta igualdad se deduce que

$$u_1 = u_2 = \dots = u_s = \alpha_1 = \beta_1 = \dots = \alpha_p = \beta_p = 0,$$

pero nosotros queremos ver que los u_j, v_k, w_k 's son todos ceros. Usando ahora (13), se tiene

$$0 = \frac{v_k - w_k i}{2}, \quad 0 = \frac{v_k + w_k i}{2}$$

y de aquí se deduce $v_k = w_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, p$. Esto completa la demostración. \square

Ejercicio 3.14. *Calcular la base \mathbb{B} del enunciado de la proposición 3.13, cuando la sucesión es $1, 1, -1, -1, 1, 1, \dots$*

Ejercicio 3.15. *Sean $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ números complejos, y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ números reales. Demostrar que*

$$Re(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \dots + \lambda_p \omega_p) = \lambda_1 Re(\omega_1) + \lambda_2 Re(\omega_2) + \dots + \lambda_p Re(\omega_p).$$

Ejercicio 3.16. Sean a y b números reales y $z \in \mathbb{C}$. Igualando parte real y parte imaginaria en la ecuación $a \operatorname{Re}(z) + b \operatorname{Im}(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$ mostrar que la solución es

$$\alpha = \frac{a - bi}{2}, \quad \beta = \frac{a + bi}{2}.$$

4. Casos de raíces múltiples

Hasta ahora sabemos como encontrar bases explícitas de soluciones para \mathcal{S} en el caso en que $P(t)$ –el polinomio asociado a la recursión– tiene raíces simples. Hemos visto que en este caso las soluciones son esencialmente potencias de las raíces de $P(t)$. Ahora veremos cómo son las soluciones en el caso en que las raíces del polinomio asociado tienen multiplicidad.

Comencemos con el caso más simple:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \tag{14}$$

cuyo polinomio asociado es $P(t) = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2$. Por lo visto al comienzo del apartado 3.2, ya sabemos que la sucesión $a_n := 1 (= 1^n) \forall n \in \mathbb{N}$ satisface con la recurrencia ya que 1 es raíz de $P(t)$. Pero también sabemos (por la proposición 2.1 que la dimensión del espacio de soluciones de (14) es dos. ¿Dónde podemos encontrar otra solución linealmente independiente con la primera, para caracterizar completamente el espacio de soluciones?

La respuesta la podremos encontrar en la demostración de la proposición 1.15. Hemos visto allí que *toda* sucesión aritmética satisface la recurrencia (14). También sabemos que “la forma” general de las sucesiones aritméticas es $C_1 + C_2 n$, donde C_1 y C_2 son constantes. Luego, tenemos un espacio de sucesiones que esencialmente depende de dos parámetros (dimensión dos) contenido en el espacio de soluciones de (14). Esto nos da la representación que buscamos.

Proposición 4.1. Sea \mathcal{S} el espacio de sucesiones que satisfacen (14). Una base para \mathcal{S} es

$$\mathbb{B} := \{(1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n)_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

Demostración. Veamos primero que $a_n := n \forall n \in \mathbb{N}$ satisface (14)². En efecto,

$$n + 2 = 2(n + 1) - n,$$

que es exactamente la ecuación de recurrencia (14). Luego, para concluir, hay que ver que \mathbb{B} es un conjunto linealmente independiente. Supongamos que existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha_1 1 + \alpha_2 n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Consideramos los dos primeros casos ($n = 1, 2$):

$$\begin{cases} \alpha_1 1 + \alpha_2 1 & = & 0 \\ \alpha_1 1 + \alpha_2 2 & = & 0. \end{cases}$$

²en realidad no haría falta ya que $a_n = n$ es una sucesión aritmética, y vimos en la demostración de la proposición 1.15 que las sucesiones aritméticas satisfacen (14).

El determinante de este sistema homogéneo es $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, con lo cual se deduce que la única solución posible para el sistema es $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, y esto demuestra la independencia lineal. \square

Observación 4.2. *Observar que esta proposición esencialmente dice que una sucesión es aritmética si y solamente si satisface la ecuación de recurrencia (14). En efecto, ya vimos que las sucesiones aritméticas satisfacen esta recurrencia, y por otro lado acabamos de demostrar que la solución general de (14) es de la forma $C_1 + C_2 n$, con $C_1, C_2 \in \mathbb{K}$, es decir una sucesión aritmética genérica.*

Veamos ahora qué pasa en un caso más general. Sea $r \in \mathbb{K}$, $r \neq 0$. Supongamos que tenemos la recursión

$$a_{n+2} = 2r a_{n+1} - r^2 a_n, \quad (15)$$

cuyo polinomio asociado es $P(t) = t^2 - 2rt + r^2 = (t - r)^2$. Este caso es más general que (14) ya que haciendo $r = 1$ en (15), recuperamos la recurrencia de las sucesiones aritméticas. Nuevamente, ya sabemos que $a_n := r^n \forall n \in \mathbb{N}$ es una solución de la recursión, y también sabemos que el espacio de soluciones tiene dimensión dos. ¿Cómo encontramos otra solución independiente de r^n ?

Para ello procedemos como sigue. Notar que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface (15), entonces se tiene que cumplir lo siguiente:

$$a_{n+2} - r a_{n+1} = r a_{n+1} - r^2 a_n = r(a_{n+1} - r a_n). \quad (16)$$

Definimos una nueva sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manera siguiente:

$$A_n := a_{n+1} - r a_n.$$

Con esta definición, la igualdad (16) se lee

$$A_{n+1} = r A_n$$

y esto nos dice que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión geométrica de razón r , o sea que existe $r_0 \in \mathbb{K}$ tal que

$$A_m = a_{m+1} - r a_m = r_0 r^m \forall m \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

Dándole diferentes valores a m , obtenemos diferentes identidades:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - r a_n &= r_0 r^n \\ a_n - r a_{n-1} &= r_0 r^{n-1} \\ a_{n-1} - r a_{n-2} &= r_0 r^{n-2} \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ a_2 - r a_1 &= r_0 r. \end{aligned} \quad (18)$$

Notar que hay n ecuaciones en esta lista. Queremos de alguna manera “eliminar” de esta lista todos los términos excepto a_{n+1} . Para ello, primero hacemos lo siguiente:

El siguiente teorema puede considerarse la generalización de la proposición 4.3. Antes de enunciarlo, recordemos que la *característica* de un cuerpo \mathbb{K} es el menor número entero positivo p tal que $p = 0$ en \mathbb{K} . Si tal número no existe (como en el caso de los números racionales, reales o complejos), entonces la característica es cero.

Teorema 4.4. *Sea \mathcal{S} el espacio vectorial de las sucesiones que satisfacen (21) con $r \neq 0$, y \mathbb{K} o bien de característica cero o sino ℓ estrictamente menor que la característica de \mathbb{K} . Entonces, una base de \mathcal{S} como \mathbb{K} -espacio vectorial es*

$$\mathbb{B} := \{(r^n)_{n \in \mathbb{N}}, (nr^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (n^{\ell-1} r^n)_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

La hipótesis impuesta sobre la relación entre la característica del cuerpo y el grado del polinomio asociado puede parecer más bien extraña. Si uno asume que está trabajando con los números racionales, reales o complejos no hay por qué suponer nada, y en el caso de característica positiva, si ℓ es mayor o igual que la característica de \mathbb{K} , se puede mostrar (no lo haremos aquí) que se puede reducir la recurrencia por otra de grado menor, lo cual hace también redundante la hipótesis.

Las soluciones de tipo $(n^k r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ se pueden deducir haciendo un análisis similar al hecho más arriba con las sucesiones de la forma (15).

Demostración. Ya sabemos que $a_n := r^n \forall n \in \mathbb{N}$ es un elemento de \mathcal{S} ya que r es una raíz del polinomio asociado.

Veamos ahora el caso $a_n := nr^n \forall n \in \mathbb{N}$. Para ello introducimos el polinomio $R(t) := (t-1)^\ell$. Notar que

$$R(t) = (t-1)^\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^{\ell-j} t^j, \quad R'(t) = \ell(t-1)^{\ell-1} = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^{\ell-j} j t^{j-1}.$$

Especializando t en 1 en las dos igualdades de arriba, y sabiendo que $\ell \geq 2$, se tiene

$$R(1) = (1-1)^\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^{\ell-j} = 0, \quad (22)$$

y

$$R'(1) = \ell(1-1)^{\ell-1} = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^{\ell-j} j = 0. \quad (23)$$

Ahora vamos a demostrar que la sucesión $(nr^n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface (21), es decir que $\sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-r)^{\ell-j} (n+j) r^{n+j}$ es igual a cero. Calculamos

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-r)^{\ell-j} (n+j) r^{n+j} = r^{n+\ell} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (n+j) (-1)^{\ell-j} = \\ = & r^{n+\ell} n \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^{\ell-j} + r^{n+\ell} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} j (-1)^{\ell-j} = 0, \end{aligned}$$

el primer término de la última igualdad es cero por (22), el segundo término es cero por (23). Esto prueba que $(nr^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un elemento de \mathcal{S} .

Para ver que en general $(n^k r^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$, con $1 \leq k < \ell$, usaremos inducción en k . Para ello necesitaremos el siguiente resultado auxiliar:

Lema 4.5. *Fijados $\ell \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$ $0 \leq k < \ell$, se tiene*

$$\sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} j^k (-1)^{\ell-j} = 0,$$

donde entenderemos que si $j = k = 0$, $j^k = 1$.

Demostración del Lema. La demostración es por inducción en k . Para $k = 0, 1$, son las igualdades (22) y (23) respectivamente. Veamos el caso general. Fijemos $k \in \mathbb{N}$, $k < \ell$. Entonces se tiene que $R^{(k)}(t)$, la derivada k -ésima de R con respecto a t , es igual a

$$\ell(\ell-1)(\ell-2) \dots (\ell-k+1)(t-1)^{\ell-k} = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} j(j-1) \dots (j-k+1) t^{j-k} (-1)^{\ell-j}.$$

Como $k < \ell$, haciendo $t = 1$ en esta igualdad, se tiene

$$\sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} j(j-1) \dots (j-k+1) (-1)^{\ell-j} = 0. \quad (24)$$

El polinomio $t(t-1) \dots (t-k+1)$ es mónico y tiene coeficientes enteros, es decir que existen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$t(t-1) \dots (t-k+1) = t^k + \alpha_1 t^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} t + \alpha_k,$$

y haciendo $t = j$, queda

$$j(j-1) \dots (j-k+1) = j^k + \alpha_1 j^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} j + \alpha_k.$$

Usamos esta igualdad para operar en (24), y queda

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (j^k + \alpha_1 j^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} j + \alpha_k) (-1)^{\ell-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} j^k (-1)^{\ell-j} + \sum_{p=1}^k \alpha_p \left(\sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} j^{k-p} (-1)^{\ell-j} \right). \end{aligned}$$

Los términos que figuran entre paréntesis son todos iguales a cero por hipótesis inductiva ($k-p < k$ en todos los casos), así que

$$\sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} j^k (-1)^{\ell-j} = 0,$$

que era lo que queríamos probar. \square

Volvamos a la demostración del teorema. Usando el lemma 4.5, veremos que $(n^k r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface (21). Sean t_1 y t_2 dos variables distintas. Entonces se tiene

que el polinomio $(t_1 + t_2)^k$ tiene coeficientes enteros y grado en t_2 igual a k . Lo escribimos como polinomio en t_2 con “coeficientes” que son polinomios en t_1 :

$$(t_1 + t_2)^k = \beta_0(t_1)t_2^k + \beta_1(t_1)t_2^{k-1} + \dots + \beta_k(t_1),$$

y si especializamos $t_1 = n$ y $t_2 = j$, queda

$$(n + j)^k = \beta_0(n)j^k + \beta_1(n)j^{k-1} + \dots + \beta_k(n). \quad (25)$$

Vamos a usar esta igualdad enseguida. Para ver que $(n^k r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface (21), hay que mostrar que

$$\sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (n + j)^k r^{n+j} (-1)^{\ell-j} r^{\ell-j} = 0.$$

Usando (25), nos queda que el primer miembro de esta igualdad es igual a

$$\begin{aligned} & r^{n+\ell} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (\beta_0(n)j^k + \beta_1(n)j^{k-1} + \dots + \beta_k(n)) (-1)^{\ell-j} = \\ & = r^{n+\ell} \sum_{p=0}^k \beta_p(n) \left(\sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} j^{k-p} (-1)^{\ell-j} \right) = 0, \end{aligned}$$

la última igualdad vale ya que cada término que está entre paréntesis es cero (ver el lema 4.5).

Finalmente, nos resta ver la independencia lineal. Para ello, supongamos que tenemos una combinación lineal de elementos de \mathbb{B} que es idénticamente cero; o sea que existen $\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell} \in \mathbb{K}$ tal que

$$\alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n + \dots + \alpha_{\ell} n^{\ell-1} r^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como estamos suponiendo $r \neq 0$, entonces podemos cancelar r en el miembro izquierdo de la igualdad y nos queda

$$\alpha_1 + \alpha_2 n + \dots + \alpha_{\ell} n^{\ell-1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

El polinomio $S(t) := \alpha_1 + \alpha_2 t + \dots + \alpha_{\ell} t^{\ell-1}$ es un elemento de $\mathbb{K}[t]$, tiene grado menor o igual que $\ell - 1$ pero se anula en al menos ℓ puntos distintos : $1, 2, \dots, \ell$ (son distintos pues por hipótesis o bien la característica de \mathbb{K} es cero o bien $\ell < \text{car}(\mathbb{K})$). El lema siguiente dice que $S(t)$ es el polinomio nulo, o sea $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{\ell} = 0$ que es lo que queríamos ver. \square

Lema 4.6. *Sea $S(t)$ un polinomio de grado menor o igual que $\ell - 1$ con coeficientes en \mathbb{K} que se anula en al menos ℓ puntos distintos. Entonces $S(t)$ es el polinomio nulo.*

Demostración. Por inducción en ℓ . Si $\ell = 1$ entonces $S(t)$ es una constante que se anula en al menos un punto. Entonces la constante tiene que ser cero y eso demuestra el enunciado para este caso.

Veamos el caso general. Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ son los puntos distintos de \mathbb{K} donde se anula $S(t)$. Como $S(\lambda_\ell) = 0$, esto quiere decir que $t - \lambda_\ell$ divide a $S(t)$, o sea

$$S(t) = (t - \lambda_\ell)U(t) \quad (26)$$

con $U(t) \in \mathbb{K}[t]$, de grado menor o igual que $\ell - 2$.

Como sabemos además que $S(\lambda_1) = S(\lambda_2) = \dots = S(\lambda_{\ell-1}) = 0$, de (26) se deduce (ya que $\lambda_j \neq \lambda_k$ para $j \neq k$) que $U(\lambda_1) = U(\lambda_2) = \dots = U(\lambda_{\ell-1}) = 0$. Por hipótesis inductiva, se tiene entonces que $U(t)$ es el polinomio idénticamente cero, lo cual implica que $S(t) = 0$, como queríamos probar. \square

Ejercicio 4.7. Sea \mathbb{K} un cuerpo de característica p con $p > 0$. Mostrar que los números $1, 2, \dots, p-1$ son distintos dos a dos en \mathbb{K} .

5. El Caso General

Hemos encontrado hasta ahora una descripción total en forma de soluciones explícitas del espacio de soluciones de recursiones en los casos en que el polinomio asociado o bien tiene todas sus raíces simples, o bien es de la forma $(t - r)^\ell$. Veremos ahora cómo se resuelve el caso general, que es cuando hay combinaciones de unas y otras (como $(t - r_1)^{\ell_1}(t - r_2)^{\ell_2}$). La siguiente proposición nos servirá para encontrar soluciones para el caso general, partiendo de casos particulares ya estudiados.

Proposición 5.1. Sea $P(t)$ el polinomio asociado a una recursión, y $Q(t)$ un polinomio mónico cualquiera. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface la recursión cuyo polinomio asociado es $P(t)$, entonces también satisface la recursión cuyo polinomio asociado es $P(t)Q(t)$.

Demostración. Desarrollamos $P(t)$ y $Q(t)$:

$$P(t) = t^\ell + \sum_{j=0}^{\ell-1} \lambda_j t^j, \quad Q(t) = t^{\ell'} + \sum_{k=0}^{\ell'-1} \lambda'_k t^k.$$

Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface la recurrencia que tiene a $P(t)$ como asociado, entonces

$$a_{m+\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} a_{m+j} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

El producto $P(t)Q(t)$ se puede escribir así

$$\left(t^{\ell'+\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} \lambda_j t^{\ell'+j} \right) + \sum_{k=0}^{\ell'-1} \lambda'_k \left(t^{k+\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} \lambda_j t^{k+j} \right).$$

Con lo cual, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface la recurrencia asociada a $P(t)Q(t)$, entonces

$$\left(a_{n+\ell'+\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} \lambda_j a_{n+\ell'+j} \right) + \sum_{k=0}^{\ell'-1} \lambda'_k \left(a_{n+k+\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} \lambda_j a_{n+k+j} \right)$$

tiene que ser igual a cero. Esto es fácil de comprobar pues las expresiones entre parentesis son idénticamente cero, ya que son casos particulares de (27) con $m = n + \ell'$ y $m = n + k$ respectivamente. Esto demuestra lo afirmado. \square

Ahora estamos en condiciones de demostrar el resultado general.

Teorema 5.2. *Sea \mathcal{S} el espacio de soluciones de una recurrencia lineal. Si el polinomio asociado a esta recurrencia tiene la forma*

$$P(t) = (t - r_1)^{\ell_1} (t - r_2)^{\ell_2} \dots (t - r_u)^{\ell_u},$$

con $\ell_1 \geq 1, \ell_2 \geq 1, \dots, \ell_u \geq 1$, ninguno de los r_i es cero, y además la característica de \mathbb{K} es o bien cero o bien mayor que $\ell_1 + \dots + \ell_u$, entonces una base de soluciones de \mathcal{S} es

$$\{(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (nr_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (n^{\ell_1-1} r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (nr_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (n^{\ell_2-1} r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (n^{\ell_u-1} r_u^n)_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

Demostración. Fijemos $j \in \{1, 2, \dots, u\}$ y $k \in \{1, 2, \dots, \ell_j - 1\}$. Por lo visto en la sección anterior, $(n^k r_j^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es solución de la recurrencia que tiene como polinomio asociado a $(t - r_j)^{\ell_j}$. Por la proposición 5.1, se tiene que también satisface la recurrencia asociada a $P(t)$ ya que este polinomio es un múltiplo de $(t - r_j)^{\ell_j}$. Luego, $(n^k r_j^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S} \quad \forall j \leq u, \forall k < \ell_j$.

Por cuestiones de dimensión, solo resta ver la independencia lineal del conjunto de soluciones. Sea $\ell := \ell_1 + \dots + \ell_u$. Supongamos entonces que existen ℓ números $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1\ell_1}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{u\ell_u} \in \mathbb{K}$ tal que

$$\alpha_{11} r_1^n + \alpha_{12} n r_1^n + \dots + \alpha_{1\ell_1} n^{\ell_1-1} r_1^{\ell_1} + \alpha_{21} r_2^n + \dots + \alpha_{u\ell_u} n^{\ell_u-1} r_u^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Fijamos $j = 1, 2, \dots, u$, y definimos $P_j(t) := \lambda_{j1} + \lambda_{j2}t + \dots + \lambda_{j\ell_j}t^{\ell_j-1}$. Con esta notación, (28) se escribe

$$P_1(n) r_1^n + P_2(n) r_2^n + \dots + P_u(n) r_u^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La independencia lineal estará demostrada si mostramos que $P_j(t) = 0 \forall j = 1, 2, \dots, u$. Esto es precisamente el enunciado del próximo teorema. \square

Teorema 5.3. Sean ℓ_1, \dots, ℓ_u enteros positivos, y \mathbb{K} un cuerpo de característica cero o bien de característica mayor que $\ell_1 + \dots + \ell_u$. Sean $P_1(t), \dots, P_u(t) \in \mathbb{K}[t]$ polinomios de grado menor que ℓ_1, \dots, ℓ_u respectivamente, y $r_1, \dots, r_u \in \mathbb{K}$ distintos dos a dos y ninguno de ellos igual a cero. Supongamos que

$$P_1(n)r_1^n + P_2(n)r_2^n + \dots + P_u(n)r_u^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, $P_1(t) = P_2(t) = \dots = P_u(t) = 0$.

Demostración. La demostración será por inducción en u . Para $u = 1$, se tiene $P_1(n)r_1^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Como $r_1 \neq 0$, entonces se tiene $P_1(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. El lema 4.6 nos dice entonces que $P_1(t) = 0$.

Veamos el caso general. Supongamos que el enunciado no es cierto, y se pueden conseguir polinomios $P_1(t), \dots, P_u(t) \in \mathbb{K}[t]$ no todos de ellos nulos, tal que

$$-P_u(n)r_u^n = P_1(n)r_1^n + \dots + P_{u-1}(n)r_{u-1}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (29)$$

Notar que se debe de tener $P_u(t) \neq 0$, sino habría una contradicción con la hipótesis inductiva. De todas las posibles maneras de encontrar familias de la forma (29), elegimos aquella donde el grado de $P_u(t)$ es mínimo. De (29) se deduce

$$-P_u(n+1)r_u^{n+1} = P_1(n+1)r_1^{n+1} + \dots + P_{u-1}(n+1)r_{u-1}^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Multiplicando por r_u la primer ecuación y restándole la segunda, se tiene

$$\begin{aligned} & (P_u(n+1) - P_u(n)r_u)r_u^n = \\ & (P_1(n)r_u - P_1(n+1)r_1)r_1^n + \dots + (P_{u-1}(n)r_u - P_{u-1}(n+1)r_{u-1})r_{u-1}^n. \end{aligned} \quad (30)$$

Definimos $Q_u(t) := r_u (P_u(t) - P_u(t+1))$, y

$$Q_j(t) := P_j(n)r_u - P_j(n+1)r_j, \quad j = 1, \dots, u-1.$$

Es fácil ver que el grado de $Q_u(t)$ es menor estrictamente que el grado de $P_u(t)$. Luego, (30) se lee

$$-Q_u(n)r_u^n = Q_1(n)r_1^n + \dots + Q_{u-1}(n)r_{u-1}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

que es de la forma (29) pero con el grado de $Q_u(t)$ menor que el grado mínimo. Esto puede ocurrir si $Q_u(t) = Q_1(t) = \dots = Q_{u-1}(t) = 0$. La proposición siguiente dice que esto implica que $P_1(t) = \dots = P_{u-1}(t) = 0$, y esto naturalmente implica que $P_u(t) = 0$. \square

Proposición 5.4. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 1$. Si $P(t) \in \mathbb{K}$ verifica $P(t+1) = \lambda P(t)$, entonces $P(t) = 0$.

Demostración. Supongamos que el grado de $P(t)$ está acotado por d , y escribamos $P(t) = \sum_{j=0}^d p_j t^j$. De acuerdo a la hipótesis, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^d p_j (t+1)^j - \lambda \left(\sum_{j=0}^d p_j t^j \right) \\ &= \sum_{j=0}^d p_j \left(\sum_{k=0}^j \binom{j}{k} t^k \right) - \lambda \left(\sum_{j=0}^d p_j t^j \right) \\ &= \sum_{j=0}^d \left(\sum_{k=j}^d p_k \binom{k}{j} - \lambda p_j \right) t^j; \end{aligned}$$

o sea que la condición $P(t+1) = \lambda P(t)$ es equivalente a

$$\sum_{k=j}^d p_k \binom{k}{j} - \lambda p_j = 0 \quad \forall j \leq d.$$

Esto último es un sistema lineal homogéneo en los coeficientes p_j :

$$\begin{cases} (1-\lambda)p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_d = 0, \\ (1-\lambda)p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + dp_d = 0, \\ (1-\lambda)p_2 + \binom{3}{2}p_3 + \dots + \binom{d}{2}dp_d = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \\ (1-\lambda)p_d = 0. \end{cases}$$

El sistema está triangulado, y como $1-\lambda \neq 0$, entonces tiene como única solución la solución trivial $p_0 = p_1 = \dots = p_d = 0$. \square

Ejercicios 5.5. 1. Calcular las fórmulas generales de las siguientes sucesiones:

a)
$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0, \\ a_{n+4} = 10a_{n+3} - 35a_{n+2} + 50a_{n+1} - 24a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, \\ a_{n+4} = -6a_{n+3} - 13a_{n+2} - 12a_{n+1} - 4a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2. Enunciar y demostrar un resultado similar a la proposición 3.9 que contemple el caso general donde una de las raíces del polinomio asociado es 0.

3. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $a_2 = 2$ y

$$a_{n+2} = -2a_{n+1} - 4a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calcular a_{2006} .

4. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y $a_{55} = 3$. Calcular a_1 .

Referencias

- [1] K. Hoffman, R. Kunze, *Algebra Lineal*, Prentice Hall Hispanoamericana, 1973.
- [2] A. Markushévich, *Sucesiones Recurrentes*, Editorial MIR, 1974.
- [3] J. Sabia, S. Tesauri, *Sucesiones Recursivas Lineales*, Universidad de Buenos Aires, 2005.
- [4] M. Spiegel, *Finite Differences and Difference Equations*, McGraw-Hill Publishing Company, 1989.